

Partie A.

1. La droite (AB) coupe les cercles C_1 et C_2 en deux points, les plus éloignés du milieu de $[AB]$ étant : A_1 et B_1 . Le cercle C_0 de diamètre A_1B_1 et de centre O_1 , contient C_1 et C_2 . Son rayon est $r_0 = \frac{A_1B_1}{2}$. Soit C un cercle de centre O et de rayon minimal r contenant C_1 et C_2 . On a donc $r \leq r_0$. C contient donc A_1 et B_1 . Alors $OA_1 + OB_1 \geq A_1B_1 \Rightarrow 2r \geq 2r_0 \Rightarrow r \geq r_0 \Rightarrow r = r_0$. De plus $OA_1 = OB_1 = r_0$ donc O est le milieu de $[A_1B_1]$ et aussi de $[AB]$. L'unique cercle répondant à la question est donc C_0 . (Figure 1)
2. **Cas où $n = 3$ figure 2 :** (EF) coupe C_1 et C_2 en E_1 et F_1 .
Le cercle de diamètre $[E_1F_1]$ contient C_3 en plus de C_1 et C_2 . Son rayon est minimal d'après 1. (Figure 2).

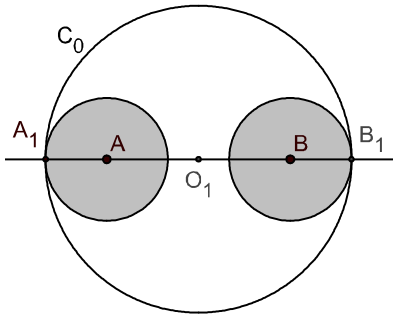


Figure 1

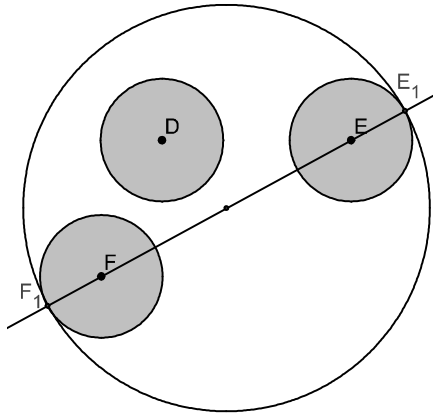


Figure 2

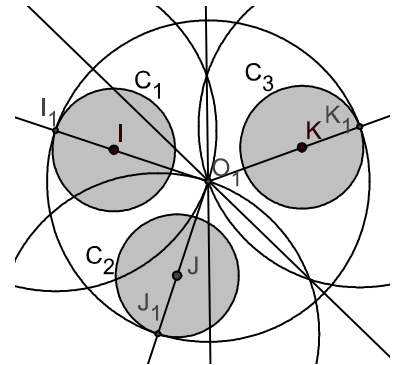
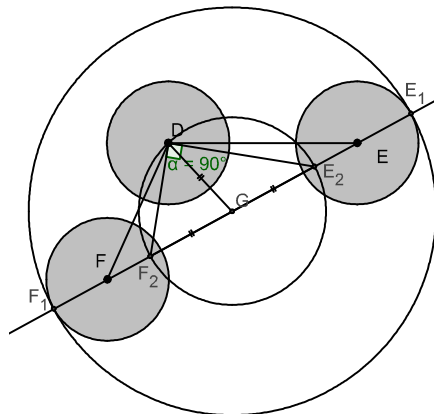


Figure 3

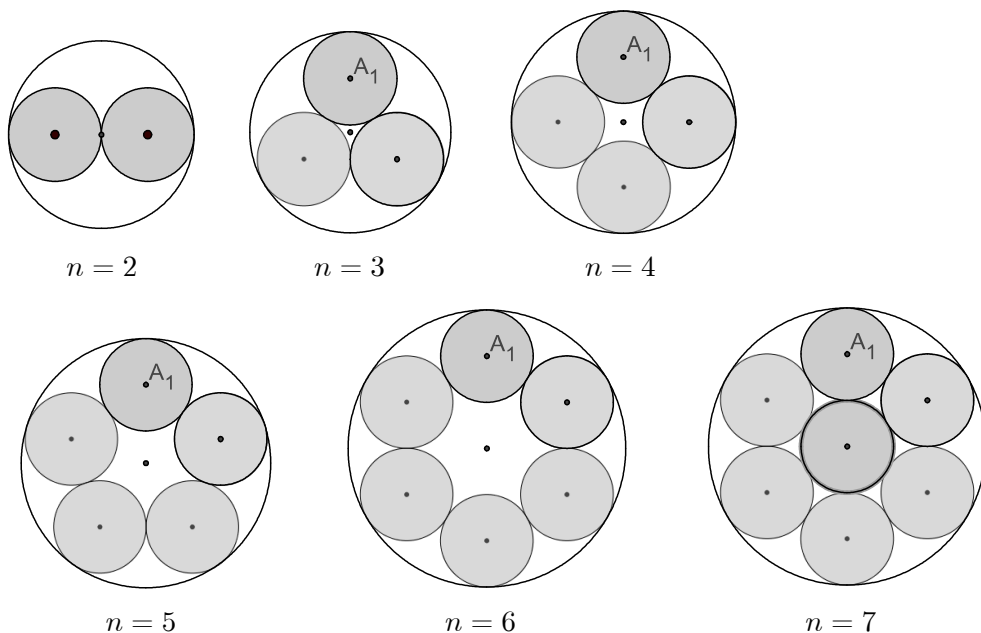
Cas où $n = 3$ figure 2 : Soit C un cercle de centre O et de rayon minimal r_0 contenant les trois cercles C_1, C_2 et C_3 . (Figure 3)

- Les médiatrices de $[IK]$ et $[JK]$ se coupent en O_1 .
- Les droites (O_1I_1) , (O_1J_1) et (O_1K_1) coupent C_1, C_2 et C_3 respectivement en I_1 , J_1 et K_1 (points les plus éloignés de O_1).
- C contient I_1 , J_1 et K_1 . Son centre O est tel que $OI_1 \leq r_0$, $OJ_1 \leq r_0$ et $OK_1 \leq r_0$. Notons r_1 le rayon du cercle circonscrit à $I_1J_1K_1$. Comme r_0 est minimal on a $r_1 = r_0$. Or dans le cas de la figure les trois disques de centres respectifs I_1 , J_1 et K_1 et de rayon r_1 n'ont qu'un point commun O_1 donc $O = O_1$. Il y a donc un unique cercle de rayon minimal contenant les trois cercles C_1, C_2 et C_3 .
- Remarquons que la différence entre les deux configurations (Figures 2 et 3) vient de la présence ou non d'un angle obtus dans le triangle formé par les centres des cercles. Cela vient du fait que la médiane issue du sommet de l'angle obtus (respectivement droit, aigu) est inférieure (respectivement égale, supérieure) à la moitié du coté opposé. Preuve dans cette figure :



Partie B.

Conjectures de configurations :



Partie C.

1. Le triangle A_1OA_2 a pour cotés 3, 3, 2. L'angle $\alpha = \widehat{A_1OA_2}$ est donc tel que $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ d'où $\alpha \approx 38^\circ, 942$ puis $\frac{360}{\alpha} \approx 9,2445$. On peut donc loger au plus 9 cercles à l'intérieur de la couronne.
2. Pour pouvoir loger exactement 5 cercles on doit avoir : $\alpha \leq \frac{2\pi}{5}$. Or $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{1+r}$ donc $\frac{1}{1+r} \leq \sin \frac{\pi}{5}$, On en déduit $r \geq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{5}} - 1 \approx 0.7013$.
3. Notons R_i le rayon du grand cercle correspondant au rayon minimal d'un cercle contenant les i pièces de la configuration conjecturée. On a alors :
 - $R_2 = 2$
 - $R_3 = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} + 1 = \frac{2}{3}\sqrt{3} + 1 \approx 2.1547$
 - $R_4 = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} + 1 = \sqrt{2} + 1 \approx 2.4142$
 - $R_5 = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{5}} + 1 \approx 2.7013$
 - $R_6 = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} + 1 = 3$
 - Et pour aller plus loin on peut montrer que $R_7 = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} + 1 = 3$, car à partir de $n = 7$ l'espace intérieur peut contenir une autre pièce.